Theoretical Computer Science 117 (1993) 243–253
Elsevier

Sur la distribution des anti-excédances dans le groupe symétrique et dans ses sous-groupes

Roberto Mantaci

L.I.T.P., Université Paris 7, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France

Résumé

Mantaci, R., Sur la distribution des anti-excédances dans le groupe symétrique et dans ses sous-groupes, Theoretical Computer Science 117 (1993) 243–253.

Nous prouvons directement que la statistique des anti-excédances est une statistique eulérienne sur S_n et donnons une formule récursive pour la détermination de la distribution des anti-excédances parmi les permutations paires et impaires. Nous donnons aussi une caractérisation des groupes de permutations qui contiennent le cycle standard $(1\ 2\ \dots\ n)$ en termes de leur distribution d'anti-excédances.

Abstract

Mantaci, R., Sur la distribution des anti-excédances dans le groupe symétrique et dans ses sous-groupes, Theoretical Computer Science 117 (1993) 243–253.

We directly prove that the anti-exceedance statistic is an eulerian statistic on S_n and we give a recursive formula to determinate the distribution of anti-exceedances among odd and even permutations. We also give a characterization of permutation groups containing the standard cycle $(1\ 2\ \dots\ n)$ in terms of their anti-exceedance distribution.

1. Introduction

Nous avons commencé à étudier dans [9] les *anti-excédances* d'une permutation, c'est-à-dire le nombre de fois qu'une permutation transforme un entier i en un autre plus petit ou égal à i, en essayant de généraliser un résultat de Perrin [10, Lemme 2]. Nous ne savions pas alors qu'une littérature abondante existait déjà dans ce domaine; nous nous sommes donc maintenant conformés à la terminologie déjà existante et

Correspondance à: R. Mantaci, Laboratoire d'Informatique Théorique et de Programmation, Université Paris 7, 2 place Jussieu, Paris, 75251 Cedex 05, France.

0304-3975/93/$06.00

c'est pourquoi nous avons appelé de façon quelque peu barbare ces objets, après avoir découvert qu'ils constituent l'inverse des *excédances* qui sont étudiées depuis longtemps (cf. [4, 5, 6, 8]).

Cette nouvelle statistique sur le groupe symétrique est une statistique eulérienne comme les statistiques des excédances, des montées ou des descentes. Pour prouver l'eulérienneté des autres statistiques, c'est-à-dire pour prouver directement qu'elles satisfont les équations définissant les nombres eulériens, il faut procéder de manière combinatoire en faisant des introductions adéquates de chiffres dans les mots représentants les permutations ou en comptant les 'runs' du mot (cf. par exemple [7]) ou les 'readings' d'une permutation conjuguée (cf. par exemple [11]). Ici, par contre, la preuve qui donne notre formule récursive est faite algébriquement en utilisant le produit naturel des permutations.

Cela explique probablement pourquoi l'on s'est seulement intéressé jusqu'à présent à la distribution des statistiques eulériennes dans tout le groupe symétrique, car les statistiques étudiées jusqu'ici étaient mal compatibles avec la structure de groupe. Le processus de détermination du nombre d'anti-excédances pour les permutations d'un certain degré, obtenu à l'aide de formules récurrentes, a rendu possible le calcul de la distribution des anti-excédances pour les permutations paires et impaires en donnant ainsi la distribution des anti-excédances dans les groupes alternés. Nous avons aussi pu étudier ainsi les distributions dans certains sous-groupes de S_n.

Pour tout ce qui regarde les groupes de permutations nous avons suivi en général la terminologie et les notations de [12].

2. L'eulérienneté de la statistique des anti-excédances sur le groupe symétrique

Les nombres eulériens sont définis par la relation de récurrence:

$$A_{1,1}=1, \qquad A_{1,k}=0 \quad \text{pour } k\neq 1,$$

$$A_{n,k}=kA_{n-1,k}+(n-k+1)A_{n-1,k-1} \quad \text{pour } n\geqslant 2 \text{ et } 1\leqslant k\leqslant n.$$

On a en plus $A_{0,k}=0$ pour $k\neq 1$, mais on pose par convention (cf. par exemple [7]) $A_{0,1}=1$.

Nous reportons dans la table suivante les premières valeurs de ces nombres:

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	1	1					
3	1	4	1				
4	1	11	11	1			
5	1	26	66	26	1		
6	1	57	302	302	57	1	
7	1	120	1191	2416	1191	120	1

On vérifie directement à partir de la formule récursive que l'on a:

$$\sum_{k=1}^{n} A_{n,k} = n! \quad \forall n.$$

On retrouve ainsi les nombres $A_{n,k}$ dans divers problèmes d'énumération concernant le groupe S_n. Plus généralement on donne la définition suivante.

Definition 2.1. Soient D_n un ensemble de cardinal $n!$ et X une application définie sur D_n à valeurs entières; on dit que X est une statistique eulérienne sur D_n si

$$A_{n,k} = \mathrm{card}\{d \in D_n \colon X(d) = k\}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

On trouve parfois aussi la définition suivante qui propose donc une autre convention.

Definition 2.1′. Soient D_n un ensemble de cardinal $n!$ et X une application définie sur D_n à valeurs entières; on dit que X est une statistique eulérienne sur D_n si

$$A_{n,k} = \mathrm{card}\{d \in D_n \colon X(d) = k-1\}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

On a donc des statistiques eulériennes à valeurs dans l'intervalle $[1, n]$ (celles satisfaisant la Définition 2.1) et d'autres à valeurs dans l'intervalle $[0, n-1]$ (celles satisfaisant la Définition 2.1′).

Definition 2.2. Soit π une permutation du groupe symétrique S_n; on dit que π présente une anti-excédance en $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ si $i\pi \leqslant i$.

La statistique AX qui associe à chaque permutation du groupe symétrique S_n le nombre d'anti-excédances qu'elle présente est une statistique à valeurs dans l'intervalle $[1, n]$. Nous commençons par donner une preuve directe du fait que la statistique des anti-excédances est une statistique eulérienne sur le groupe symétrique.

Theoreme 2.3. *La statistique des anti-excédances est une statistique eulérienne sur le groupe symétrique S_n.*

Preuve. Soit π une permutation de S_{n-1} qui présente k anti-excédances. Pour chaque anti-excédance $i \to i\pi$, la permutation $\pi \cdot (i\pi \;\; n)$ est une permutation de S_n qui présente k anti-excédances. En effet, on a perdu l'anti-excédance $i \to i\pi$, (puisque maintenant $i \to n$), mais on a en plus l'anti-excédance $n \to i\pi$. On associe ainsi à chaque permutation π de S_{n-1} qui présente k anti-excédances, k permutations de S_n qui présentent k anti-excédances, toutes du type $\pi\sigma$, où σ est une transposition de S_n qui échange n.

Si, par contre, π est une permutation de S_{n-1} qui présente $k-1$ anti-excédances et si pour chacune des $n-k$ excédances $i \to i\pi$, nous multiplions à droite π par la transposition $(i\pi \;\; n)$, nous obtenons alors la permutation $\pi \cdot (i\pi \;\; n)$ de S_n qui présente à nouveau

k anti-excédances, puisque maintenant $i \to n$ reste une excédance mais on a en plus l'anti-excédance $n \to i\pi$. D'ailleurs, chaque permutation de S_{n-1} qui présente $k-1$ anti-excédances peut être considérée comme une permutation de S_n qui présente k anti-excédances en ajoutant celle du point fixe n. Nous associons ainsi à chaque permutation π de S_{n-1} qui présente $k-1$ anti-excédances, $n-k+1$ permutations de S_n qui présentent k anti-excédances et qui sont toutes du type $\pi\sigma$, avec σ transposition de S_n qui permute n, à l'exception d'une seule qui fixe n.

Nous allons montrer que les permutations que l'on a ainsi obtenues sont toutes différentes. En effect si $\pi_1\sigma_1 = \pi_2\sigma_2$, alors on a nécessairement $n\pi_1\sigma_1 = n\pi_2\sigma_2$ et, puisque π_1 *et* π_2 fixent n (elles appartiennent à S_{n-1}) on a $n\sigma_1 = n\sigma_2$. Mais chaque σ_i (pour $i = 1, 2$) est soit égal à l'identité ou bien est une transposition qui permute n. Par conséquent, $n\sigma_1 = n\sigma_2$ implique $\sigma_1 = \sigma_2$ et donc, $\pi_1 = \pi_2$.

Il est évident d'ailleurs que toute permutation de S_n qui présente k anti-excédances peut s'obtenir avec l'une des deux façons décrites ci dessus donc, si nous appelons $C_{n,k}$ le nombre de ces permutations, ce que nous avons établi ci-dessus nous donne:

$$C_{n,k} = kC_{n-1,k} + (n-k+1)C_{n-1,k-1} \quad \forall n > 1,\ 1 \leqslant k \leqslant n$$

et, puisque $C_{1,1} = 1$ et évidemment $C_{n,k} = 0$ pour $k \leqslant 0$ ou $k > n$, on déduit que $C_{n,k} = A_{n,k}$ $\forall n > 1$, $1 \leqslant k \leqslant n$. $\square$

Remarque. L'eulérienneté de la statistique AX des anti-excédances peut être prouvée moins directement mais plus rapidement en utilisant le fait que la statistique EXC des excédances est eulérienne, en observant qu'on a la relation $AX(\pi) = n - EXC(\pi)$ pour toute permutation π de S_n (c'est-à-dire que AX est le complément à n de EXC) et utilisant le fait que les nombres eulériens ont la propriété de symétrie suivante: $A_{n,k} = A_{n,n-k+1}$ $\forall n > 1$, $1 \leqslant k \leqslant n$. On a en effet:

$$\operatorname{card}\{\pi \in S_n\colon AX(\pi) = k\} = \operatorname{card}\{\pi \in S_n\colon EXC(\pi) = n-k\} = A_{n,n-k+1} = A_{n,k}.$$

3. Distribution des anti-excédances dans le groupe alterné.

Quand on effectue la multiplication par une transposition comme dans le Théorème 2.3, on obtient des permutations paires (resp. impaires) à partir des permutations impaires (resp. paires). En plus, chaque permutation paire (resp. impaire) de S_{n-1} qui présente $k-1$ anti-excédances donnera une permutation paire (resp. impaire) de S_n qui présente k anti-excédances.

Si $P_{n,k}$ et $D_{n,k}$ désignent respectivement le nombre de permutations paires et impaires de S_n qui présentent k anti-excédances, on obtient les formules récursives suivantes:

$$P_{n,k} = kD_{n-1,k} + (n-k)D_{n-1,k-1} + P_{n-1,k-1},$$

$$D_{n,k} = kP_{n-1,k} + (n-k)P_{n-1,k-1} + D_{n-1,k-1}.$$

On a bien évidemment $P_{n,k}+D_{n,k}=A_{n,k}$ et en particulier $P_{n,k}=0$ et $D_{n,k}=0$ si $k>n$ ou si un des deux indices est inférieur ou égal à zéro. Nous posons par convention $D_{0,1}=1$ (rappelons que $A_{0,1}=1$ par convention). De plus on a pour tout n:

$$P_{n,n}=P_{n-1,n-1}=\cdots=P_{1,1}=1, \qquad D_{n,n}=D_{n-1,n-1}=\cdots=D_{1,1}=0,$$

et,

$$P_{n,1}=1 \quad \text{si } n \text{ est impair} \quad \text{et} \quad P_{n,1}=0 \quad \text{si } n \text{ est pair,}$$

$$D_{n,1}=1 \quad \text{si } n \text{ est pair} \quad \text{et} \quad D_{n,1}=0 \quad \text{si } n \text{ est impair,}$$

car le cycle standard $(1\ 2\ \ldots\ n)$, qui est la seule permutation avec une anti-excédance, est une permutation paire si et seulement si n est impair.

Les deux formules pour $P_{n,k}$ et $D_{n,k}$, bien que compactes, ont le désavantage d'exprimer chaque suite en fonction de l'autre. Nous voulons obtenir une expression qui donne $P_{n,k}$ en fonction uniquement des $P_{n,k}$ qui le précédent. Multiplions pour cela chaque terme des deux équations du système par $u^n t^k$ et sommons sur u et t; nous obtenons alors:

$$\sum_{\substack{n=1\\1\leqslant k\leqslant n}}^{\infty} P_{n,k}u^n t^k = \sum_{\substack{n=1\\1\leqslant k\leqslant n}}^{\infty} k\cdot D_{n-1,k}u^n t^k + \sum_{\substack{n=1\\1\leqslant k\leqslant n}}^{\infty} (n-k)D_{n-1,k-1}u^n t^k + \sum_{\substack{n=1\\1\leqslant k\leqslant n}}^{\infty} P_{n-1,k-1}u^n t^k$$

$$\sum_{\substack{n=1\\1\leqslant k\leqslant n}}^{\infty} D_{n,k}u^n t^k = \sum_{\substack{n=1\\1\leqslant k\leqslant n}}^{\infty} k\cdot P_{n-1,k}u^n t^k + \sum_{\substack{n=1\\1\leqslant k\leqslant n}}^{\infty} (n-k)P_{n-1,k-1}u^n t^k + \sum_{\substack{n=1\\1\leqslant k\leqslant n}}^{\infty} D_{n-1,k-1}u^n t^k$$

Appelons respectivement P et D les deux sommes

$$\sum_{\substack{n=1\\1\leqslant k\leqslant n}}^{\infty} P_{n,k}u^n t \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{n=1\\1\leqslant k\leqslant n}}^{\infty} D_{n,k}u^n t^k.$$

Les sommes P et D sont alors les fonctions génératrices des deux suites $P_{n,k}$ et $D_{n,k}$, et nous pouvons traduire toutes les sommes du système ci dessus en fonction de P, de D et de leurs dérivées. On obtient ainsi que les fonctions D et P satisfont le système d'équations aux dérivées partielles suivant:

$$\begin{cases} (1-ut)P=(ut-ut^2)\dfrac{\partial D}{\partial t}+u^2 t\dfrac{\partial D}{\partial u}+ut, \\[2ex] (1-ut)D=(ut-ut^2)\dfrac{\partial P}{\partial t}+u^2 t\dfrac{\partial P}{\partial u}. \end{cases}$$

Si l'on tire D de la deuxième équation, et que l'on substitue cette expression dans la première, on obtient une équation en P et en ses dérivées partielles de premier et second ordre de la forme suivante:

$$(1-ut)^3P-ut(1-ut)^2=Q_{1,0}\frac{\partial P}{\partial t}+Q_{0,1}\frac{\partial P}{\partial u}+Q_{2,0}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}+Q_{1,1}\frac{\partial^2 P}{\partial u\,\partial t}+Q_{0,2}\frac{\partial^2 P}{\partial u^2}$$

où les Q_{ij} sont des polynômes en u et t que l'on peut facilement calculer. Si on identifie maintenant dans les séries ci-dessus les coefficients des termes en u^nt^k, on obtient la formule:

$$\begin{aligned}P_{n,k}=\;&3P_{n-1,k-1}+k^2P_{n-2,k}+(2nk-2k^2-n)P_{n-2,k-1}\\&+(k^2-2nk+n^2-3)P_{n-2,k-2}-(k-1)(k-2)P_{n-3,k-1}\\&+(2k^2-2nk+4n-3k-2)P_{n-3,k-2}+(2nk-k^2-n^2+1)P_{n-3,k-3}\\&+\delta_{n,k}(\delta_{1,n}-2\delta_{2,n}+\delta_{3,n})\end{aligned}$$

où $\delta_{i,j}$ représente le *symbole de Kronecker.*

En partant des valeurs initiales $P_{1,1}=1$ et $D_{1,1}=0$, pour $n\leqslant 7$ on obtient les valeurs suivantes pour $P_{n,k}$:

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	0	1					
3	1	1	1				
4	0	7	4	1			
5	1	11	36	11	1		
6	0	31	146	156	26	1	
7	1	57	603	1198	603	57	1

et pour $D_{n,k}$:

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7
1	0						
2	1	0					
3	0	3	0				
4	1	4	7	0			
5	0	15	30	15	0		
6	1	26	156	146	31	0	
7	0	63	588	1218	588	63	0

Pour un n fixé, les $P_{n,k}$ donnent la distribution des anti-excédances dans le groupe alterné A_n. On peut remarquer que ces distributions sont symétriques pour les valeurs impaires de n, i.e., on a $P_{n,k}=P_{n,n+1-k}$ pour tout k; dans le prochain paragraphe, nous donnerons une démonstration plus générale de ce fait.

4. La distribution des anti-excédances dans d'autres groupes de permutation

Definition 4.1. Si G est un groupe de permutations de degré n, on définit la distribution des anti-excédances de G comme étant le n-uple $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ où d_j est le nombre de permutations de G présentant j anti-excédances.

Par exemple, on a pour tout groupe G:

$$d_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } G \text{ contient le cycle standard } (1\ 2\ \ldots\ n), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$d_n = 1 \quad \text{(car seule l'identité a } n \text{ anti-excédances).}$$

Definition 4.2. Si G est un groupe de permutations de degré n, on dira que sa distribution des anti-excédances est symétrique si on a $d_j = d_{n+1-j}$ pour tout $j = 1, \ldots, n$.

Nos calculs des distributions des anti-excédances dans les groupes de permutations ont été faits en utilisant le système Cayley (voir [1, 2]).

Theoreme 4.3. *La distribution des anti-excédances d'un groupe de permutations de degré n est symétrique si et seulement si le groupe contient le cycle standard $\alpha = (1\ 2\ \ldots\ n)$.*

Preuve. Une implication est triviale car, si le cycle n'est pas dans le groupe, on a $d_1 = 0$ et $d_n = 1$. Pour prouver la réciproque, nous montrerons que la bijection φ de G dans G définie par $\varphi(\pi) = \pi^{-1}\alpha$ vérifie $a_\pi + a_{\varphi(\pi)} = n+1$ pour toute permutation π (où a_π représente le nombre d'anti-excédances de la permutation π).

Soit $\sigma = \pi^{-1}\alpha$. Alors σ présente une anti-excédance en i si et seulement si $i\sigma \leqslant i$, c'est-à-dire si et seulement si $i\pi^{-1}\alpha \leqslant i$. Supposons maintenant $i\pi^{-1} \neq n$ $(i \neq n\pi)$ alors, $i\pi^{-1}\alpha = i\pi^{-1}+1$ et on a donc:

$$i\sigma \leqslant i \;\Leftrightarrow\; i\pi^{-1}+1 \leqslant i \;\Leftrightarrow\; i\pi^{-1} < i.$$

Ainsi σ a une anti-excédance en i si et seulement si π^{-1} présente une anti-excédance au sens strict en i, et ceci est équivalent à dire que π présente une excédance. Pour toute excédance de π en i avec $i\pi^{-1} \neq n$, σ présente donc une anti-excédance. De plus, quand i est égal à $n\pi$, π^{-1} ne peut avoir d'anti-excédance au sens strict et π n'a donc pas d'excédance. Ainsi à toute excédance de π correspond bijectivement une anti-excédance de σ.

On a ainsi trouvé $n-a_\pi$ anti-excédances pour la permutation σ, l'anti-excédance ultime étant présentée dans l'entier $i=n\pi$ puisque $i\sigma=i\pi^{-1}\alpha=n\alpha=1\leqslant i$. $\square$

Corollaire 4.4. *La distribution des anti-excédances sur le groupe alterné A_n est symétrique si et seulement si n est impair.*

Preuve. On avait déjà observé que le cycle standard $(1\ 2\ \ldots\ n)$ est un permutation paire si et seulement si n est impair. $\square$

Remarque. Si n est impair on a également $D_{n,k}=D_{n,n+1-k}$, puisque dans ce cas:

$$D_{n,k}=A_{n,k}-P_{n,k}=A_{n,n+1-k}-P_{n,n+1-k}=D_{n,n+1-k}.$$

Pour ce qui concerne le lien entre les anti-excédances et l'opération de conjugaison à l'intérieur du groupe symétrique, nous avons le résultat suivant.

Proposition 4.5. *Soit π une permutation du groupe symétrique S_n et soit a_π le nombre d'anti-excédances de π, alors les conjugués de π par les puissances de α présentent le même nombre d'anti-excédances.*

Preuve. Puisque $\pi^{\alpha^{n+1}}=(\pi^{\alpha^n})^\alpha$, il suffit de montrer que le nombre d'anti-excédances ne change pas par conjugaison par α.

Supposons $i\neq n$ et $i\neq n\pi^{-1}$; si π a une anti-excédance en i c'est-à-dire si $i\pi\leqslant i$, alors $i\pi+1\leqslant i+1$ et donc, $(i+1)\pi^\alpha\leqslant i+1$ et π^α présente une anti-excédance en $i+1$. De même si $i\pi>i$, on a $i\pi+1>i+1$ et $(i+1)\pi^\alpha>i+1$; donc, pour $i\neq n$ et $i\neq \pi n^{-1}$, on a une bijection entre les anti-excédances de π en i et celles de π^α en $i+1$.

Par ailleurs, dans les deux entiers que nous s'avons pas considérés, π présente une anti-excédance $(n\to n\pi)$ et une excédance $(n\pi^{-1}\to(n\pi^{-1})\pi=n)$ qui correspondent pour π^α à l'excédance $1\to n\pi+1$ et à l'anti-excédance $n\pi^{-1}+1\to 1$. $\square$

5. Le nombre moyen d'anti-excédances

La formule bien connue de Burnside donne le nombre d'orbites d'un groupe de permutation en terme du nombre de points fixés par les éléments de G:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}\chi(\pi)=h, \tag{1}$$

où h est le nombre d'orbites et $\chi(\pi)=|\{i\mid i\pi=i\}|$. Nous allons montrer que l'argument classique qui donne la formule (1) peut être utilisé pour prouver une formule similaire quand le nombre $\chi(\pi)$ de points fixes de π est remplacé par le nombre d'anti-excédances de π. Nous aurons ainsi quelques informations sur le nombre moyen d'anti-excédances dans un groupe de permutations quelconque. Nous noterons ci-dessous par a_π le nombre d'anti-excédances de la permutation π, et par $A_G = \sum_{\pi \in G} a_\pi$ la somme de toutes les anti-excédances de toutes les permutations du groupe G. Plus généralement, $A_S = \sum_{\pi \in S} a_\pi$ désignera la somme de toutes les anti-excédances de toutes les permutations du sous-ensemble S du groupe G.

Theoreme 5.1. *Soit G un groupe de permutations de degré n, et h le nombre d'orbites de G. Alors on a:*

$$A_G = |G| \frac{n+h}{2}.$$

Preuve. Le nombre total d'anti-excédances est donné par:

$$\sum_{\pi \in G} |\{i | i\pi \leqslant i\}| = \sum_{j \leqslant i} |\{i | \exists \pi : i\pi = j\}| \tag{$*$}$$

Soit Δ une orbite de G et considérons la contribution de Δ à la somme qui se trouve au membre droit de $(*)$:

$$\sum_{j \leqslant i} |\{i | \exists \pi : i\pi = j\}|, \quad i, j \in \Delta \tag{$**$}$$

Comme G est évidemment transitif sur les éléments de Δ, chaque terme de $(**)$ est égal à $|G|/|\Delta|$ et le nombre d'éléments de la somme est égal au nombre de couples (i, j) avec $i, j \in \Delta$ et $j \leqslant i$ c'est-à-dire $|\Delta|(|\Delta|+1)/2$.

Si $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_h$ sont les orbites de G, nous avons donc:

$$A_G = \sum_{t=1}^{h} \frac{|G|}{|\Delta_t|} \frac{|\Delta_t|(|\Delta_t|+1)}{2} = |G| \frac{n+h}{2}$$

car le nombre des éléments de toutes les orbites est évidemment n. $\square$

Corollaire 5.2. *Un groupe de permutation G de degré n est transitif si et seulement si*

$$A_G = |G| \frac{n+1}{2}.$$

Remarque. En utilisant le Théorème 5.1 et la formule de Burnside nous pouvons obtenir le nombre d'anti-excédances au sens strict ($i\pi < i$):

$$A_G^* = |G| \frac{n+h}{2} - |G| h = |G| \frac{n-h}{2}$$

qui d'ailleurs coincide avec le nombre total d'excédances:

$$E_G = |G| \frac{n-h}{2}$$

L'expression du nombre moyen d'anti-excédances semble être plutôt une propriété des classes de conjugaison comme la proposition suivante le prouve, nous donnons d'abord une remarque.

Remarque. Si τ est un cycle $(i_1 \ \dots \ i_m)$, $m>1$, et τ présente t anti-excédances, alors le cycle inverse présente $m-t$ anti-excédances (τ^{-1} présente une anti-excédance si et seulement si τ présente une excédance).

Proposition 5.3. *Soient G un groupe de permutation de degré n, π une permutation de G, H la classe de conjugaison de π dans S_n et χ_H le nombre de points fixés par chaque permutation de H. Alors*

$$A_{G\cap H}=|G\cap H|\,\frac{n+\chi_H}{2}$$

Preuve. Observons d'abord que si σ est une permutation de H alors dans sa décomposition en cycles disjoints apparaissent exactement χ_H cycles de longueur 1; ces mêmes cycles apparaîtront aussi dans son inverse. Pour la remarque précedente et pour ce que nous venons de dire on a donc:

$$\forall \pi\in G\cap H \quad a_\pi + a_{\pi^{-1}} = n+\chi_H$$

et donc, si nous sommons sur les $|G\cap H|/2$ couples (π, π^{-1}) avec $\pi\in G\cap H$, nous avons ce qu'il fallait démontrer. □

Remerciements

Je tiens à remercier très profondément monsieur le professeur Dominique Foata, qui a été mon inspirateur, guide, conseiller et consultant "à distance" et qui m'a donné les directives pour la suite de mon travail, ainsi que Daniel Krob qui a eu la tache ingrate de relire cet article pour y apporter gentiment les corrections de style nécessaires.

References

[1] J.J. Cannon, An introduction to the group theory language, Cayley, dans: M.D. Atkinsons, éd., *Proc. London Math. Soc. Symp. on Computational Group Theory* (Academic Press, London, 1984) 145–183.

[2] J.J. Cannon, Cayley: a language for group theory, preprint.

[3] L. Comtet, *Analyse Combinatoire*, Vol. 2 (Presses Universitaires de France, Paris, 1970).

[4] D. Foata, Distributions eulériennes et mahoniennes sur le groupe de permutations, dans: M. Aigner, éd., *Higher Combinatorics* (Springer, Berlin, 1976) 27–49; Proc. NATO Adv. Study Inst. (Reidel, Amsterdam, 1977).

[5] D. Foata and M.P. Schützenberger, *Théorie Géometrique des Polynômes Eulériens*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 138 (Springer, Berlin, 1970).

[6] D. Foata and D. Zeilberger, Denert's permutation statistic is indeed euler–mahonian, preprint.

[7] D.E. Knuth, *The Art of Computer Programming, Vol. 3/Sorting and Searching* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1973).
[8] M. Lothaire, *Combinatorics on Words*, Encyclopedia of Math. and its Appl., Vol. 17 (Addison-Wesley, Reading, MA, 1983).
[9] R. Mantaci, Descents in permutation groups, Rapp. L.I.T.P. 90-21 (1990).
[10] D. Perrin, Le degré minimal du groupe d'un code bipréfixe fini, *J. Combin. Theory Ser. A* **25** (1978) 163-173.
[11] J. Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis* (Wiley, New York, 1958).
[12] H. Wielandt, *Finite Permutation Groups* (Academic Press, New York, 1964).